УДК 51

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ РАЗНОИМЕННЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ОСТРОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Акопов Вачакан Ваграмович
учитель
МОУ средняя общеобразовательная школа №6
с. Полтавское, Курский район, Ставропольский край

INVESTIGATION OF THE INTERSECTION POINTS OF DISSIMILAR REMARKABLE LINES IN AN ACUTE-ANGLED TRIANGLE

Akopov Vachakan Vagramovich

Аннотация. Известно, что изучение геометрии начинается с треугольника и в какой-то степени он является основой геометрической науки. Также известно, что постоянно открываются его новые свойства и часто многие из них связаны с замечательными точками и линиями треугольника. В данной статье рассматривается исследование точек пересечения разноимённых замечательных линий в остроугольном треугольнике.

Abstract. It is known that the study of geometry begins with a triangle and to some extent it is the basis of geometric science. It is also known that new properties are constantly being discovered, and often many of them are associated with remarkable points and lines of the triangle. This article deals with the study of the intersection points of dissimilar remarkable lines in an acute-angled triangle.

Ключевые слова: остроугольный треугольник, серединный перпендикуляр, медиана, точка пересечения.

Key words: acute-angled triangle, mid-perpendicular, median, intersection point.

Проведём исследование точек пересечения разноименных замечательных линий в остроугольном треугольнике: серединного перпендикуляра и медианы.

«Серединный перпендикуляр треугольника – это перпендикуляр, проведённый к середине стороны треугольника. Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны» [1].

1) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана AD и серединный перпендикуляр KM. Серединный перпендикуляр KM пересекает сторону AB в точке K, а сторону AC в точке M. Медиана AD пересекает сторону BC в точке D. Серединный перпендикуляр KM и медиана AD пересекаются в точке O (рис.1). Доказать, что эта точка делит медиану и серединный перпендикуляр в отношении: $\frac{AO}{OD}=\frac{MO}{OK}=\frac{2c^2}{b^2+c^2-a^2}$.

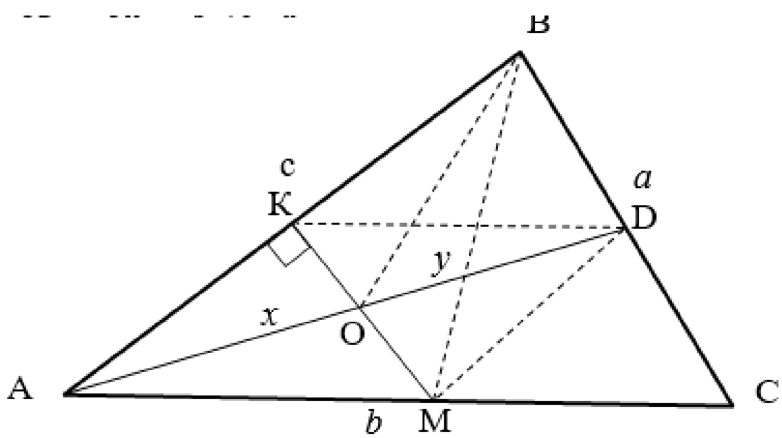

Рис. 1

Доказательство. Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $AO=x$, $OD=y$. Известно, что серединный перпендикуляр в треугольнике является медианой и высотой. Из условия равенства прямоугольных треугольников AKO и BKO следует равенство двух острых углов: $\angle KAO=\angle KBO$. Поэтому ΔAOB–равнобедренный, т.е. $AO=BO$. Известно, что медиана AD в ΔABC выражается формулой: $AD\ =\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, (1). Из ΔABD по теореме Стюарта имеем: $AB^2\cdot OD+BD^2\cdot AO-BO^2\cdot AD=$

$AD \cdot AO \cdot OD$, (2). Пусть $AO=BO=x$ и $OD=y$, с учетом, что $BD = \frac{a}{2}$, и, используя выражения (1) и (2), получим: $c^2 y + \frac{a^2}{4} \cdot x - x^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = x \cdot y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, или $4c^2 y + a^2 \cdot x - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = xy \cdot 2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, (3). Учитывая, что $x+y=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, получим $y=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - x$, (4). Используя выражения (3) и (4), получим: $4c^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - x\right) + a^2 x - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2x \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - x\right)$ или $2c^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - 4c^2 x + a^2 x - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = x(2b^2 + 2c^2 - a^2) - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, отсюда $2c^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 4c^2 x - a^2 x + x(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, $2c^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 4c^2 x - a^2 x + 2b^2 x + 2c^2 x - a^2 x$, $2c^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2x \cdot (b^2 + 3c^2 - a^2)$, тогда $x = \frac{c^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{b^2+3c^2-a^2}$, (5). Используя выражения (4) и (5), получим: $y = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} - \frac{c^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{b^2+3c^2-a^2} = \frac{(b^2+3c^2-a^2)\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} - 2c^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2(b^2+3c^2-a^2)} = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot(b^2+3c^2-a^2-2c^2)}{2(b^2+3c^2-a^2)} = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot(b^2+c^2-a^2)}{2(b^2+3c^2-a^2)}$, (6). Используя выражения (5) и (6), получим: $\frac{x}{y} = \frac{c^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{b^2+3c^2-a^2} \cdot \frac{2(b^2+3c^2-a^2)}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot(b^2+c^2-a^2)} = \frac{2c^2}{b^2+c^2-a^2}$ или $\frac{AO}{OD} = \frac{2c^2}{b^2+c^2-a^2}$, (7) , что и требовалось доказать. Четырёхугольник *AKDM* является трапецией, так как *KD*||*AM*, а *AD* и *KM* являются диагоналями. Из свойства диагоналей трапеции следует: треугольники, образованные отрезками диагоналей трапеции, стороны которых лежат на боковых сторонах трапеции – равновеликие (имеют одинаковую площадь). Треугольники *AOK* и *DOM* равновеликие, то есть $S_{\Delta AOK} = S_{\Delta DOM}$ или $\frac{1}{2} \cdot AO \cdot OK \cdot sin\angle AOK = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot MO \cdot sin\angle DOM$. Учитывая, что $\angle AOK = \angle DOM$ (как вертикальные), получим: $AO \cdot OK = OD \cdot MO$ или $\frac{AO}{OD} = \frac{MO}{OK}$, (8) , что и требовалось доказать.

Задача. В остроугольном ΔABC со сторонами $BC=a=4\sqrt{7}см$, $AC=b=8см$ и $AB=c=12см$ проведены медиана *AD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *AB* в точке *K*, а сторону *AC* в точке *M*. Медиана *AD* пересекает сторону *BC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *AD* пересекаются в точке *O* (рис.1). Найти, в каком отношении эта точка делит медиану и серединный перпендикуляр.

Дано:	Решение:
ΔABC $BC=a=4\sqrt{7}см$ $AC=b=8см$ $AB=c=12см$	Воспользуемся выражением (7): $\frac{AO}{OD} = \frac{2c^2}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2\cdot(12)^2}{8^2+12^2-(4\sqrt{7})^2} = \frac{2\cdot 144}{64+144-112} = \frac{288}{96} = 3.$ Из выражения (8) следует, что $\frac{MO}{OK} = \frac{AO}{OD} = 3.$
$\frac{AO}{OD}$ –? $\frac{MO}{OK}$ –?	Ответ: $\frac{AO}{OD} = \frac{MO}{OK} = 3.$

2) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана *AD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *AC* в точке *K*, а сторону *AB* в точке *M*. Медиана *AD* пересекает сторону *BC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *AD* пересекаются в точке *O* (рис.2). Доказать, что эта точка делит медиану и серединный перпендикуляр в отношении: $\frac{AO}{OD} = \frac{MO}{OK} = \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}$.

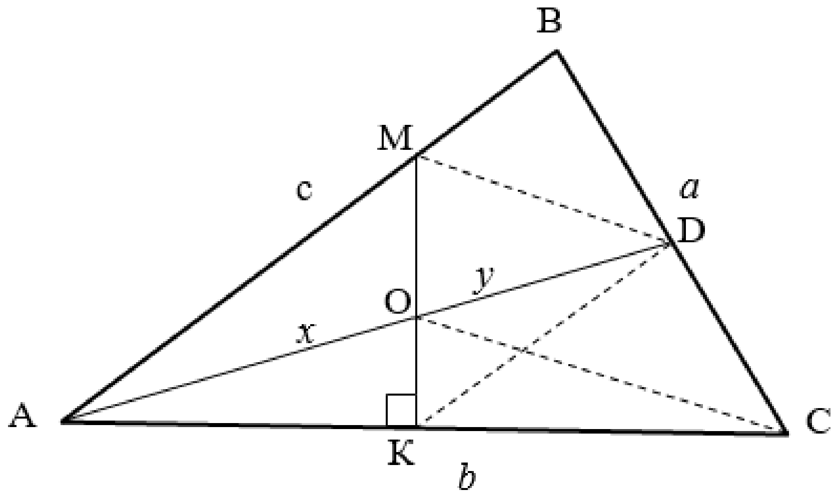

Рис. 2

Доказательство. Обозначим *BC=a*, *AC=b*, *AB=c*, *AO=x*, *OD=y*. Известно, что серединный перпендикуляр в треугольнике является медианой и высотой. Из условия равенства прямоугольных треугольников *AKO* и *CKO* следует равенство двух острых углов: $\angle KAO = \angle KCO$. Поэтому ΔAOC–равнобедренный, т.е. *AO=CO*. Известно, что медиана *AD* в ΔABC выражается формулой: $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, (1). Из ΔADC по теореме Стюарта имеем: $AC^2 \cdot OD + CD^2 \cdot AO - CO^2 \cdot AD = AD \cdot AO \cdot OD$, (2). Пусть *AO=CO=x* и *OD=y*, с учетом, что $CD = \frac{a}{2}$, и, используя выражения (1) и (2), получим: $b^2 y + \frac{a^2}{4} \cdot x - x^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = x \cdot y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, или $4b^2 y + a^2 \cdot x - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = xy \cdot 2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, (3). Учитывая, что $x+y = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, получим $y = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - x$, (4). Используя выражения (3) и (4), получим: $4b^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - x\right) + a^2 x - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2x \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - x\right)$ или $2b^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} - 4b^2 x + a^2 x - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = x(2b^2 + 2c^2 - a^2) - 2x^2 \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, отсюда $2b^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 4b^2 x - a^2 x + x(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, $2b^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = x(4b^2 - a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2)$, $2b^2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2x \cdot (3b^2 + c^2 - a^2)$, тогда $x = \frac{b^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3b^2+c^2-a^2}$, (5). Используя выражения (4) и (5), получим: $y = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2} - \frac{b^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3b^2+c^2-a^2} = \frac{(3b^2+c^2-a^2)\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} - 2b^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3b^2+c^2-a^2} = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot(3b^2+c^2-a^2-2b^2)}{2(3b^2+c^2-a^2)} = \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot(b^2+c^2-a^2)}{2(3b^2+c^2-a^2)}$, (6). Используя выражения (5) и (6), получим: $\frac{x}{y} = \frac{b^2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3b^2+c^2-a^2} \cdot \frac{2(3b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\cdot(b^2+c^2-a^2)} = \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}$ или $\frac{AO}{OD} = \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}$, (7) , что и требовалось доказать. Четырёхугольник *AKDM* является трапецией, так как *KD*||*AM*, а *AD* и *KM* являются диагоналями. Из свойства диагоналей трапеции следует: треугольники, образованные отрезками диагоналей трапеции, стороны которых лежат на боковых сторонах трапеции – равновеликие (имеют одинаковую площадь). Треугольники *AOK* и *DOM* равновеликие, то есть $S_{\Delta AOK} = S_{\Delta DOM}$ или $\frac{1}{2} \cdot AO \cdot OK \cdot sin\angle AOK = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot MO \cdot sin\angle DOM$. Учитывая, что $\angle AOK = \angle DOM$ (как вертикальные), получим: $AO \cdot OK = OD \cdot MO$ или $\frac{AO}{OD} = \frac{MO}{OK}$, (8) , что и требовалось доказать.

Задача. В остроугольном ΔABC со сторонами *BC=a=6,7см*, *AC=b=7,5см* проведены медиана *AD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *AC* в точке *K*, а сторону *AB* в точке *M*. Медиана *AD* пересекает сторону *BC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *AD* пересекаются в точке *O* (рис.2). Найти сторону *AB=c*, если $\frac{AO}{OD} = \frac{3}{2}$.

Дано:	Решение:
ΔABC *BC=a=6,7см* *AC=b=7,5см* $\frac{AO}{OD} = \frac{3}{2}$	Воспользуемся выражением (7): $\frac{AO}{OD} = \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}$ или $\frac{3}{2} = \frac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}$, отсюда $c^2 = a^2 + \frac{b^2}{3} = (6,7)^2 + \frac{(7,5)^2}{3} \approx 64$, тогда *c=8см.* Ответ: *c=8см.*

c –?

3) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана *AD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *BC* в точке *K*, а сторону *AC* в точке *M*. Медиана *AD* пересекает сторону *BC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *AD* пересекаются в точке *O*, которая находится на стороне *BC* (рис.3). Точки *D*, *K* и *O* совпадают. Следовательно, какие-либо отношения отрезков отсутствуют.

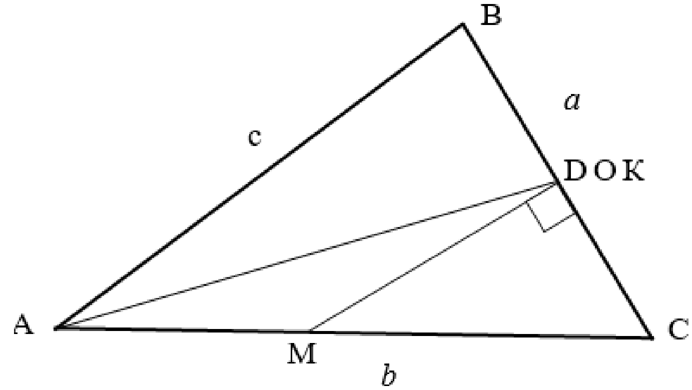

Рис. 3

4) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана *BD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *AB* в точке *K*, а сторону *AC* в точке *M*. Медиана *BD* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *BD* пересекаются в точке *O* (рис.4). Доказать, что эта точка делит медиану и серединный перпендикуляр в отношении: $\frac{BO}{OD}=\frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2}$ и $\frac{OM}{OK}=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{a^2+c^2-b^2}$.

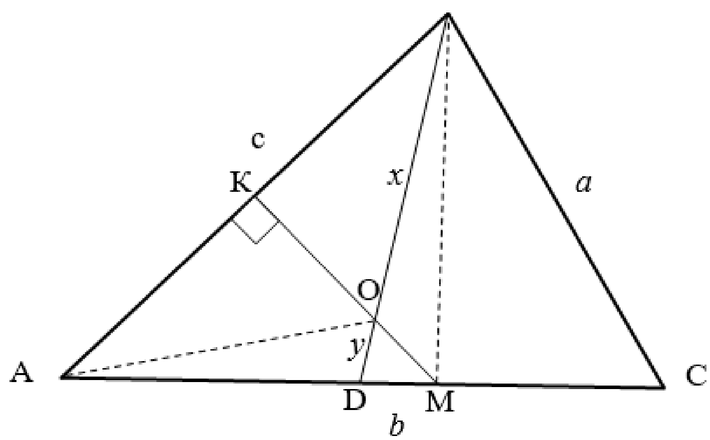

Рис. 4

Доказательство. Обозначим *BC=a*, *AC=b*, *AB=c*, *BO=x*, *OD=y*. Известно, что серединный перпендикуляр в треугольнике является медианой и высотой. Из условия равенства прямоугольных треугольников *AKO* и *BKO* следует равенство двух острых углов: $\angle KAO=\angle KBO$. Поэтому ΔAOB–равнобедренный, т.е. *AO=BO*. Известно, что медиана *BD* в ΔABC выражается формулой: $BD\ =\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, (1). Из ΔADB по теореме Стюарта имеем: $AB^2\cdot OD+AD^2\cdot OB-AO^2\cdot BD=BD\cdot BO\cdot OD$, (2). Пусть *AO=BO=*$x$ и *OD=y*, с учетом, что $AD=\frac{b}{2}$, и, используя выражения (1) и (2), получим: $c^2y+\frac{b^2}{4}\cdot x-x^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=x\cdot y\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, или $4c^2y+b^2\cdot x-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=xy\cdot 2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, (3). Учитывая, что $x+y=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, получим $y=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}-x$, (4). Используя выражения (3) и (4), получим: $4c^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}-x\right)+b^2x-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=2x\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}-x\right)$ или $2c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}-4c^2x+b^2x-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=x(2a^2+2c^2-b^2)-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$, отсюда $2c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=4c^2x-b^2x+x(2a^2+2c^2-b^2)$, $2c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=x(4c^2-b^2+2a^2+2c^2-b^2)$, $2c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=2x\cdot(3c^2+a^2-b^2)$, тогда $x=\frac{c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3c^2+a^2-b^2}$, (5). Используя выражения (4) и (5), получим: $y=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}-\frac{c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3c^2+a^2-b^2}=\frac{(3c^2+a^2-b^2)\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}-2c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2(3c^2+a^2-b^2)}=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\cdot(3c^2+a^2-b^2-2c^2)}{2(3c^2+a^2-b^2)}=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\cdot(a^2+c^2-b^2)}{2(3c^2+a^2-b^2)}$, (6). Используя выражения (5) и (6), получим: $\frac{x}{y}=\frac{c^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3c^2+a^2-b^2}\cdot\frac{2(3c^2+a^2-b^2)}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}\cdot(a^2+c^2-b^2)}=\frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{BO}{OD}=\frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2}$, (7) , что и требовалось доказать. Учитывая, что *KM*=*OM*+*OK* и, разделив обе части этого равенства на *OK*, получим: $\frac{KM}{OK}=1+\frac{OM}{OK}$, отсюда $\frac{OM}{OK}=\frac{KM}{OK}-1$, (8). Из ΔABC по теореме косинусов находим: $a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot cosA$, отсюда $cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, (9). Из прямоугольного ΔAKM найдем: $cosA=\frac{AK}{AM}=\frac{c}{2\cdot AM}$, (10). Приравняв выражения (9) и (10), получим: $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c}{2\cdot AM}$, отсюда $AM=\frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2}$, (11). Из прямоугольного ΔAKM по теореме Пифагора будем иметь: $KM^2=AM^2-AK^2$, тогда, используя выражение (11), получим: $KM^2=\frac{b^2c^4}{(b^2+c^2-a^2)^2}-\frac{c^2}{4}=\frac{c^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{4(b^2+c^2-a^2)^2}$, (12). Из прямоугольного ΔBKO по теореме Пифагора находим: $OK^2=BO^2-BK^2=x^2-\frac{c^2}{4}=\frac{4x^2-c^2}{4}$, (13). Разделив выражение (12) на (13), получим: $\frac{KM^2}{OK^2}=\frac{c^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{4(b^2+c^2-a^2)^2}\cdot\frac{4}{4x^2-c^2}=\frac{c^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2(4x^2-c^2)}$, (14). Используя выражения (5) и (14), найдем:

$$\frac{KM^2}{OK^2}=\frac{c^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\left[\frac{4c^4(2a^2+2c^2-b^2)}{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2}-c^2\right]}=\frac{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot[4c^2(2a^2+2c^2-b^2)-(3c^2+a^2-b^2)^2]}=$$

$$\frac{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot\left[4c^2\left((a^2+c^2-b^2)+(a^2+c^2)\right)-\left((a^2+c^2-b^2)+2c^2\right)^2\right]}=$$

$$\frac{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot[4c^2(a^2+c^2-b^2)+4a^2c^2+4c^4-(a^2+c^2-b^2)^2-4c^2(a^2+c^2-b^2)-4c^4]}=\frac{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}=$$

$\frac{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2\cdot(4b^2c^2-b^4-2b^2c^2-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4)}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot(4a^2c^2-a^4-2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-b^4)}=\frac{\left(3c^2+a^2-b^2\right)^2}{(b^2+c^2-a^2)^2}$, отсюда $\frac{KM}{OK}=\frac{3c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$, (15). Используя выражения (8) и (15), получим: $\frac{OM}{OK}=\frac{3c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}-1=\frac{3c^2+a^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{b^2+c^2-a^2}$, (16), что и требовалось доказать.

Задача. В остроугольном ΔABC со сторонами *BC*=*a*=*6,8см*, *AB*=*c*=*8,6см* и *AC*=*b*=*9см* проведены медиана *BD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *AB* в точке *K*, а сторону *AC* в точке *M*. Медиана *BD* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *BD* пересекаются в точке *O* (рис.4). Найти следующие отношения: $\frac{BO}{OD}$ и $\frac{OM}{OK}$.

Дано:	Решение:
ΔABC *BC*=*a*=*6,8см*, *AB*=*c*=*8,6см* *AC*=*b*=*9см*	Воспользуемся выражением (7): $\frac{BO}{OD}=\frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2}=\frac{2\cdot(8,6)^2}{(6,8)^2+(8,6)^2-9^2}\approx 3,77.$ Воспользуемся выражением (16): $\frac{OM}{OK}=\frac{2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2\left((6,8)^2+(8,6)^2-9^2\right)}{9^2+(8,6)^2-(6,8)^2}\approx 0,72.$
$\frac{BO}{OD}$–? $\frac{OM}{OK}$–?	

Ответ: $\frac{BO}{OD}\approx 3,77$; $\frac{OM}{OK}\approx 0,72$.

5) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана *BD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *BC* в точке *K*, а сторону *AC* в точке *M*. Медиана *BD* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *BD* пересекаются в точке *O* (рис.5). Доказать, что эта точка делит медиану и серединный перпендикуляр в отношении: $\frac{BO}{OD}=\frac{2a^2}{a^2+c^2-b^2}$ и $\frac{OM}{OK}=\frac{2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{a^2+b^2-c^2}$.

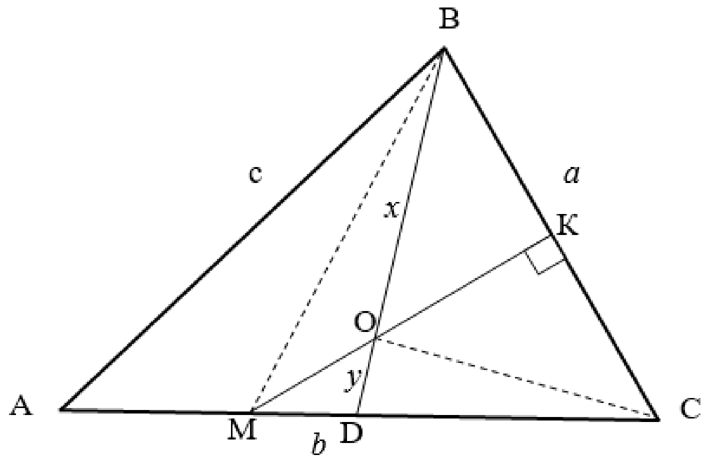

Рис. 5

Доказательство. Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $BO=x$, $OD=y$. Известно, что серединный перпендикуляр в треугольнике является медианой и высотой. Из условия равенства прямоугольных треугольников CKO и BKO следует равенство двух острых углов: $\angle KCO = \angle KBO$. Поэтому ΔBOC–равнобедренный, т.е. $CO=BO$. Известно, что медиана BD в ΔABC выражается формулой: $BD = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, (1). Из ΔBDC по теореме Стюарта имеем: $BC^2 \cdot OD + CD^2 \cdot OB - CO^2 \cdot BD = BD \cdot OB \cdot OD$, (2). Пусть $CO=OB=x$ и $OD=y$, с учетом, что $CD = \frac{b}{2}$, и, используя выражения (1) и (2), получим: $a^2 y + \frac{b^2}{4} \cdot x - x^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = x \cdot y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, или $4a^2 y + b^2 \cdot x - 2x^2 \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = xy \cdot 2\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, (3). Учитывая, что $x+y=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, получим $y=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} - x$, (4). Используя выражения (3) и (4), получим: $4a^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} - x\right) + b^2 x - 2x^2 \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = 2x \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} - x\right)$ или $2a^2\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} - 4a^2 x + b^2 x - 2x^2 \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = x(2a^2 + 2c^2 - b^2) - 2x^2 \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, отсюда $2a^2\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = 4a^2 x - b^2 x + x(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, $2a^2\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = x(4a^2 - b^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2)$, $2a^2\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = 2x \cdot (3a^2 + c^2 - b^2)$, тогда $x = \frac{a^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3a^2+c^2-b^2}$, (5). Используя выражения (4) и (5), получим: $y = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2} - \frac{a^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3a^2+c^2-b^2} = \frac{(3a^2+c^2-b^2)\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} - 2a^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2(3a^2+c^2-b^2)} = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \cdot (3a^2+c^2-b^2-2a^2)}{2(3a^2+c^2-b^2)} = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \cdot (a^2+c^2-b^2)}{2(3a^2+c^2-b^2)}$, (6). Используя выражения (5) и (6), получим: $\frac{x}{y} = \frac{a^2\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3a^2+c^2-b^2} \cdot \frac{2(3a^2+c^2-b^2)}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \cdot (a^2+c^2-b^2)} = \frac{2a^2}{a^2+c^2-b^2}$ или $\frac{x}{y} = \frac{BO}{OD} = \frac{2a^2}{a^2+c^2-b^2}$, (7), что и требовалось доказать. Учитывая, что $KM=OM+OK$ и, разделив обе части этого равенства на OK, получим: $\frac{KM}{OK} = 1 + \frac{OM}{OK}$, отсюда $\frac{OM}{OK} = \frac{KM}{OK} - 1$, (8). Из ΔABC по теореме косинусов находим: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cosC$, отсюда $cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, (9). Из прямоугольного ΔCKM найдем: $cosC = \frac{CK}{CM} = \frac{a}{2 \cdot CM}$, (10). Приравняв выражения (9) и (10), получим: $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a}{2 \cdot CM}$, отсюда $CM = \frac{a^2 b}{a^2+b^2-c^2}$, (11). Из прямоугольного ΔCKM по теореме Пифагора будем иметь: $KM^2 = CM^2 - CK^2$, тогда, используя выражение (11), получим: $KM^2 = \frac{a^4 b^2}{(a^2+b^2-c^2)^2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2\left[4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right]}{4(a^2+b^2-c^2)^2}$, (12). Из прямоугольного ΔCKO по теореме Пифагора находим: $OK^2 = CO^2 - CK^2 = x^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4x^2-a^2}{4}$, (13). Разделив выражение (12) на (13), получим: $\frac{KM^2}{OK^2} = \frac{a^2\left[4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right]}{4(a^2+b^2-c)^2} \cdot \frac{4}{4x^2-a^2} = \frac{a^2\left[4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2\right]}{(a^2+b^2-c^2)^2(4x^2-a^2)}$, (14). Используя выражения (5) и (14), найдем: $\frac{KM^2}{OK^2} = \frac{a^2\left[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right]}{(a^2+b^2-c^2)^2\left[\frac{4a^4(2a^2+2c^2-b^2)}{(3a^2+c^2-b^2)^2} - a^2\right]} = \frac{(3a^2+c^2-b^2)^2 \cdot \left[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right]}{(a^2+b^2-c^2)^2 \cdot [4a^2(2a^2+2c^2-b^2) - (3a^2+c^2-b^2)^2]} =$

$$\frac{(3a^2+c^2-b^2)^2 \cdot \left[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right]}{(a^2+b^2-c^2)^2 \cdot \left[4a^2\left((a^2+c^2-b^2)+(a^2+c^2)\right) - \left((a^2+c^2-b^2)+2a^2\right)^2\right]} =$$

$$\frac{(3a^2+c^2-b^2)^2\cdot\left[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right]}{(a^2+b^2-c^2)^2\cdot[4a^2(a^2+c^2-b^2)+4a^2c^2+4a^4-(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2(a^2+c^2-b^2)-4a^4]}=\frac{(3a^2+c^2-b^2)^2\cdot\left[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2\right]}{(a^2+b^2-c^2)^2\cdot[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}=$$
$\frac{(3a^2+c^2-b^2)^2\cdot(4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4)}{(a^2+b^2-c^2)^2\cdot(4a^2c^2-a^4-2a^2c^2-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2-b^4)}=\frac{(3a^2+c^2-b^2)^2}{(a^2+b^2-c^2)^2}$, отсюда $\frac{KM}{OK}=\frac{3a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c}$, (15). Используя выражения (8) и (15), получим: $\frac{OM}{OK}=\frac{3a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}-1=\frac{3a^2+c^2-b^2-a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{a^2+b^2-c^2}$, (16), что и требовалось доказать.

Задача. В ΔABC со сторонами *BC=a=6,3см*, *AB=c=9см* проведены медиана *BD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *BC* в точке *K*, а сторону *AC* в точке *M*. Медиана *BD* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *BD* пересекаются в точке *O* (рис.5). Найти сторону *AC=b*, если $\frac{OM}{OK}=\frac{3}{4}$.

Дано:	Решение:
ΔABC *BC=a=6,3см* *AB=c=9см* $\frac{OM}{OK}=\frac{3}{4}$ b –?	Воспользуемся выражением (16): $\frac{OM}{OK}=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{a^2+b^2-c^2}$ или $\frac{3}{4}=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{a^2+b^2-c^2}$, отсюда $8a^2+8c^2-8b^2=3a^2+3b^2-3c^2$ или $b^2=\frac{5a^2+11c^2}{11}=\frac{5}{11}a^2+c^2=\frac{5}{11}\cdot(6,3)^2+9^2\approx 99$, тогда $b\approx$*10см*.

Ответ: $b\approx$*10см*.

6) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана *BD* и серединный перпендикуляр *KM*. Серединный перпендикуляр *KM* пересекает сторону *AC* в точке *K*, а сторону *AB* в точке *M*. Медиана *BD* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Серединный перпендикуляр *KM* и медиана *BD* пересекаются в точке *O*, которая находится на стороне *AC* (рис.6). Точки *D, K* и *O* совпадают. Следовательно, какие-либо отношения отрезков отсутствуют.

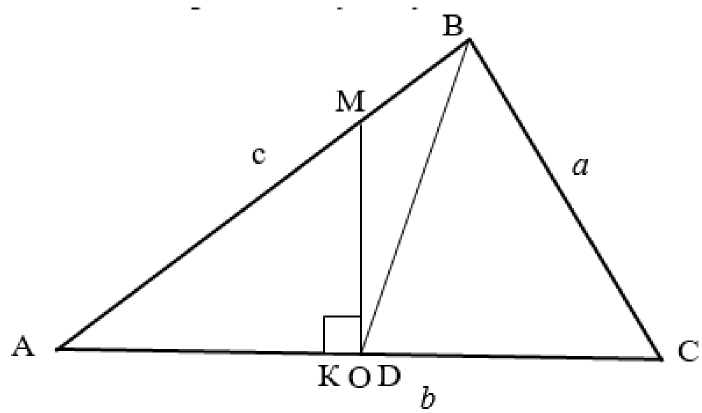

Рис. 6

7) Пусть в остроугольном ΔABC проведены медиана CD и серединный перпендикуляр KM. Серединный перпендикуляр KM пересекает сторону AC в точке K, а сторону AB в точке M. Медиана CD пересекает сторону AB в точке D. Серединный перпендикуляр KM и медиана CD пересекаются в точке O (рис.7). Доказать, что эта точка делит медиану и серединный перпендикуляр в отношении: $\frac{CO}{OD}=\frac{2b^2}{a^2+b^2-c^2}$ и $\frac{OM}{OK}=\frac{2(a^2+b^2-c^2)}{b^2+c^2-a^2}$.

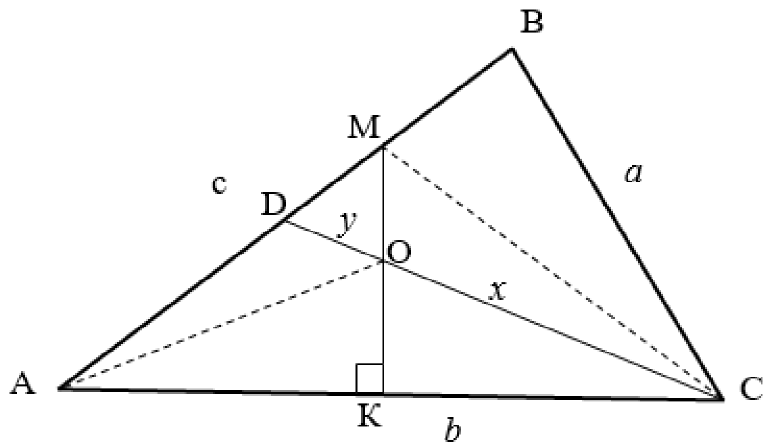

Рис. 7

Доказательство. Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $CO=x$, $OD=y$. Известно, что серединный перпендикуляр в треугольнике является медианой и высотой. Из условия равенства прямоугольных треугольников CKO и AKO следует равенство двух острых углов: $\angle KAO=\angle KCO$. Поэтому ΔAOC–равнобедренный, т.е. $CO=AO$. Известно, что медиана CD в ΔABC выражается формулой: $CD=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, (1). Из ΔADC по теореме Стюарта имеем: $AC^2\cdot OD+AD^2\cdot CO-AO^2\cdot CD=CD\cdot CO\cdot OD$, (2). Пусть $CO=AO=x$ и $OD=y$, с учетом, что $AD=\frac{c}{2}$, и, используя выражения (1) и (2), получим: $b^2y+\frac{c^2}{4}\cdot x-x^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=x\cdot y\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, или $4b^2y+c^2\cdot x-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=xy\cdot 2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, (3). Учитывая, что $x+y=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, получим $y=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-x$, (4). Используя выражения (3) и (4), получим: $4b^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-x\right)+c^2x-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=2x\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-x\right)$ или $2b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-4b^2x+c^2x-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=x(2a^2+2b^2-c^2)-2x^2\cdot\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, отсюда $2b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=4b^2x-c^2x+x(2a^2+2b^2-c^2)$, $2b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=x(4b^2-c^2+2a^2+2b^2-c^2)$, $2b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=2x\cdot(3b^2+a^2-c^2)$, тогда $x=\frac{b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{3b^2+a^2-c^2}$, (5). Используя выражения (4) и (5), имеем: $y=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}-\frac{b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{3b^2+a^2-c^2}=\frac{(3b^2+a^2-c^2)\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}-2b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2(3b^2+a^2-c^2)}=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\cdot(3b^2+a^2-c^2-2b^2)}{2(3b^2+a^2-c^2)}=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\cdot(a^2+b^2-c^2)}{2(3b^2+a^2-c^2)}$, (6). Используя выражения (5) и (6), получим: $\frac{x}{y}=\frac{b^2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{3b^2+a^2-c^2}\cdot\frac{2(3b^2+a^2-c^2)}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}\cdot(a^2+b^2-c^2)}=\frac{2b^2}{a^2+b^2-c^2}$ или $\frac{x}{y}=\frac{CO}{OD}=\frac{2b^2}{a^2+b^2-c^2}$, (7), что и требовалось доказать.

Учитывая, что $KM=OM+OK$ и, разделив обе части этого равенства на OK, получим: $\frac{KM}{OK} = 1 + \frac{OM}{OK}$, отсюда $\frac{OM}{OK} = \frac{KM}{OK} - 1$, (8). Из ΔABC по теореме косинусов находим: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot cosA$, отсюда $cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, (9). Из прямоугольного ΔAKM найдем: $cosA = \frac{AK}{AM} = \frac{b}{2 \cdot AM}$, (10). Приравняв выражения (9) и (10), получим: $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{2 \cdot AM}$, отсюда $AM = \frac{b^2 c}{b^2+c^2-a^2}$, (11). Из прямоугольного ΔAKM по теореме Пифагора будем иметь: $KM^2 = AM^2 - AK^2$, тогда, используя выражение (11), получим: $KM^2 = \frac{b^4c^2}{(b^2+c^2-a^2)^2} - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{4(b^2+c^2-a^2)^2}$, (12). Из прямоугольного ΔCKO по теореме Пифагора находим: $OK^2 = CO^2 - CK^2 = x^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4x^2-b^2}{4}$, (13). Разделив выражение (12) на (13), получим: $\frac{KM^2}{OK^2} = \frac{b^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{4(b^2+c^2-a^2)^2} \cdot \frac{4}{4x^2-b^2} = \frac{b^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2(4x^2-b^2)}$, (14). С учетом (5) и (14), имеем:

$$\frac{KM^2}{OK^2} = \frac{b^2\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\left[\frac{4b^4(2a^2+2b^2-c^2)}{\left(3b^2+a^2-c^2\right)^2}-b^2\right]} = \frac{\left(3b^2+a^2-c^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot\left[4b^2\left((a^2+b^2-c^2)+(a^2+b^2)\right)-\left((a^2+b^2-c^2)+2b^2\right)^2\right]} =$$

$$\frac{\left(3b^2+a^2-c^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot[4b^2(a^2+b^2-c^2)+4a^2b^2+4b^4-(a^2+b^2-c^2)^2-4b^2(a^2+b^2-c^2)-4b^4]} = \frac{\left(3b^2+a^2-c^2\right)^2\cdot\left[4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right]}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot[4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2]} =$$

$\frac{\left(3b^2+a^2-c^2\right)^2\cdot(4b^2c^2-b^4-2b^2c^2-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4)}{(b^2+c^2-a^2)^2\cdot(4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4)} = \frac{\left(3b^2+a^2-c^2\right)^2}{(b^2+c^2-a^2)^2}$, отсюда $\frac{KM}{OK} = \frac{3b^2+a^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}$, (15). Используя выражения (8) и (15), получим: $\frac{OM}{OK} = \frac{3b^2+a^2-c^2}{b^2+c^2-a^2} - 1 = \frac{3b^2+a^2-c^2-b^2-c^2+a^2}{b^2+c^2-a^2} = \frac{2\left(a^2+b^2-c^2\right)}{b^2+c^2-a^2}$, (16), что и требовалось доказать.

Задача. В ΔABC со сторонами $BC=a=6см$, $AC=b=5\sqrt{3}см$ и $AB=c=7,8см$ проведены медиана CD и серединный перпендикуляр KM. Серединный перпендикуляр KM пересекает сторону AC в точке K, а сторону AB в точке M. Медиана CD пересекает сторону AB в точке D. Серединный перпендикуляр KM и медиана CD пересекаются в точке O (рис.7). Найти отношения: $\frac{CO}{OD}$ и $\frac{OM}{OK}$.